Dedicatòria

La Prova Cangur és, des del seu origen, un concurs matemàtic de resolució de problemes, que poden ser bonics, assequibles i fins i tot divertits. Resoldre problemes, descobrir-ne la solució, és un repte que pot ser engrescador i és bo participar-hi. Així ho van fer aquest mes de març, milers i milers de nens i nenes, nois i noies, a Catalunya, Balears i el País Valencià.

Ara bé, la Prova Cangur no és una activitat només d'un dia.

Per una banda, és necessària tota una preparació prèvia, que es fa a través de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM), com a membre de l'associació internacional *Kangourou sans Frontières*, creada a França el 1991 i que actualment té una vuitantena de països. Cal agrair a la Comissió Cangur de la SCM la seva gran dedicació en l'organització de la prova per a fer-la possible, i a tot el professorat que col·labora el dia de la prova, l'èxit aconseguit.

Per altra banda, transcendeix el concurs i perdura com a activitat de lleure, de suport a l'aula i d'estímul del talent matemàtic. Aquesta publicació, amb referències al Cangur 2023, ens ho mostra i ens ho facilita, i és doncs un regal col·lectiu que compartim.

Montserrat Alsina i Aubach
Presidenta de la Societat Catalana de Matemàtiques

Apartats de la publicació

El 28è Cangur de la SCM es va celebrar el dia 16 de març de 2023. En el Cangur es donen 15 premis per cadascun dels vuit nivells escolars a què s'adreça el concurs i és interessant fer constar que en la llista de premis figuren 93 centres diferents, de 41 poblacions, de 23 comarques de la geografia catalana.

Les noies i els nois que obtenen premi tenen una invitació per a assistir a un Campus Cangur, organitzat per e^x*plorium* i, amb la publicació d'aquest fulletó del qual tot seguit detallem els continguts, la comissió Cangur vol afegir-hi un petit granet de sorra i donar-los la més cordial enhorabona.

- **Sobre el Cangur 2023**
    - Estadístiques del Cangur 2023: participació, puntuacions, tants per cent d'encert
    - Anàlisi d'alguns problemes: enunciats i idees per a la resposta
    - Agraïment a les entitats que han fet possible el Cangur dels en seus externes.
- **Rodonetes 3D**
    - Explicació d'un trencaclosques, elaborat per *W4Kangoeroe* (Països Baixos).
- **En record de John H. Conway**
    - El joc de la vida
    - Els nusos racionals. Amb una plantilla per poder practicar.
      Col·laboració del **mmaca**.

28è Cangur de la SCM. Dades globals

Nombre de centres

Centres diferents inscrits en el **Cangur 2023**: 1 027.

- Per zones geogràfiques:
  674 de la província de Barcelona (dels quals 166 de la ciutat de Barcelona); 139 de la província de Girona; 78 de la província de Lleida; 134 de la província de Tarragona; 1 de la Franja de Ponent, i 1 d'Andorra.
- Pels quatre nivells d'organització del Cangur:
  en el Cangur de primària: 488 centres; en el Cangur12 (1r i 2n d'ESO): 706 centres; en el Cangur 34 (de 3r i 4t d'ESO), 713 centres, i en el Cangur dels grans (batxillerat i CF): 400 centres.

Cada centre inscrit podia optar per desenvolupar el Cangur com una activitat pròpia del centre o bé participar-hi com a concurs; aquesta segona opció va ser molt majoritària i a ella fan referència els nombres de participants que més avall es detallen.

En el Cangur 2019 es van assolir els màxims de participació pel que fa al nombre de centres (1 136) i de concursants (al voltant de 125 000). L'any 2020 va ser un trasbals del que ja ens anem recuperant. Segurament si sumessim el nombre de participants en l'activitat en centres inscrits que han aprofitat les propostes del Cangur com a activitat lectiva s'hauria assolit el màxim de participació en el Cangur.

Nombre de participants en el concurs: 113 008 (quantitat de concursants pujats a la base de dades.)

- Cangur de primària: 26 395 participants
- Cangur de 1r i 2n d'ESO: 46 104 participants
- Cangur de 3r i 4t d'ESO: 32 470 participants
- Cangur de batxillerat i CF: 8 039 participant

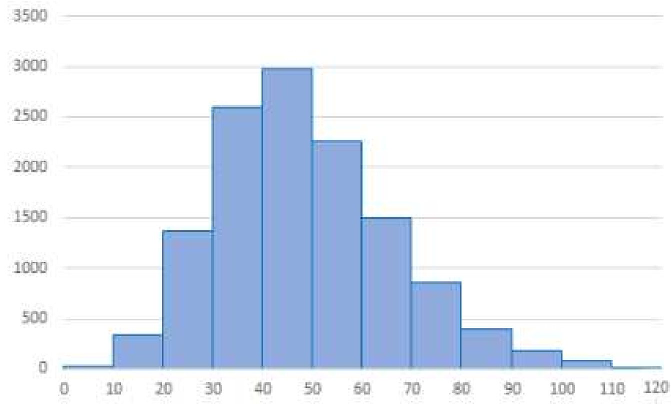
- Per zones geogràfiques:
  82 607 participants de la província de Barcelona (dels quals 25 975 en centres de la ciutat de Barcelona); 12 692 de la província de Girona; 5 297 de la província de Lleida; 12 341 de la província de Tarragona; 37 participants de la Franja de Ponent i 34 d'Andorra.

28è Cangur de la SCM. Cinquè d'Educació Primària

Nombre de participants: 12 846

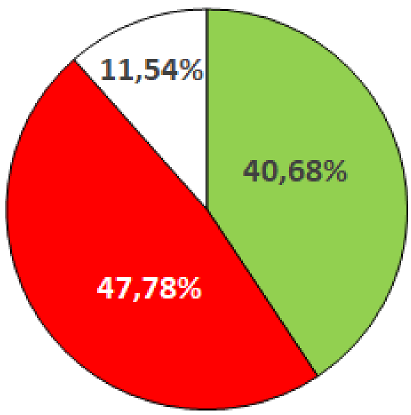
Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 405

Millor puntuació (sobre 120): 116 punts
Percentil del millor 1%: 100,00 punts
Percentil del millor 6%: 77,0 punts
Percentil del millor 10%; 72,50 punts
Quartil del millor 25%: 58,75 punts
Mediana: 46,25 punts
Mitjana: 48,16 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
18,69 + 15,55 + 13,91 punts



Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	61,40%	36,39%	24,25%
error	34,09%	51,27%	58,00%
en blanc	4,52%	12,34%	17,75%

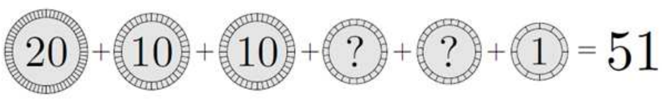


Anàlisi d'alguns problemes

La idea clau que pren en consideració el grup de treball de professorat de molts països que, en la reunió internacional, seleccionen els problemes per al Cangur és que els primers problemes siguin d'alt grau d'encert. Així ha succeït en aquest nivell. El problema que obté el percentatge més alt d'encert, més baix d'error i també més baix de respostes en blanc és el problema 1:

- Problema 1: encert 86,43 % ; error 12,84 %; en blanc 0,73 %

1. Les dues monedes amb un interrogant tenen el mateix valor. Quin valor tenen?



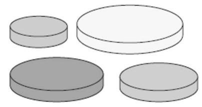
A) 1 B) 2 C) 5 D) 10 E) 20

És clar, doncs, que una majoria molt absoluta de concursants van veure que, si les monedes que tenim sumen 41 cèntims i en total n'hem de tenir 51, ens falten 10 cèntims: dues monedes de 5 cèntims cada una.

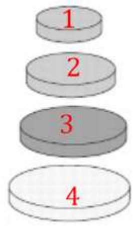
Tanmateix el problema 6, també de 3 punts, va provocar molts maldecaps i va resultar ser el problema amb més tant per cent d'error:

- Problema 6: encert 24,27 % ; error 71,60 %; en blanc 4,13 %

6. L'Anna té quatre discos de mides diferents. Vol construir torres de tres discos de manera que, a sobre d'un disc, mai no n'hi hagi un de més gran. Quantes torres diferents pot fer l'Anna?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



El problema equival a pensar un nombre de tres xifres format amb tres de les xifres 1, 2, 3 o 4, que hi apareguin ordenadament. Només cal triar quina xifra no posem. Són 4 possibilitats.

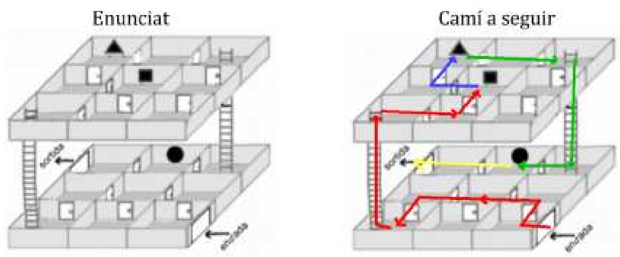
A la inversa podem comentar un problema amb un tant per cent d'encert molt significatiu respecte la resta de problemes de 4 punts. Un problema, doncs, que devia agradar i era sens dubte original: un laberint de dos pisos.

- Problema 11: encert 70,97 % ; error 27,34 %; en blanc 1,68 %

11. En Bernat camina per un laberint de dues plantes des de l'entrada fins a la sortida. Veu tres parets amb uns murals pintats amb figures geomètriques. En quin ordre les veurà?

A) ● ▲ ■ B) ■ ▲ ● C) ▲ ■ ● D) ▲ ● ■ E) ● ■ ▲

La primera imatge mostra el laberint de l'enunciat i la segona marca l'únic camí que porta a la sortida. Podem doncs deduir l'ordre en què veu les tres figures: quadrat, triangle, cercle.

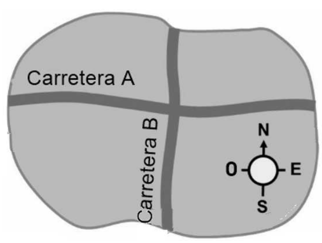


Convé explicar que en la reunió anual de it Kangourou sans frontières les propostes que s'elaboren estan pensades com a vàlides per a dos nivells escolars. És així que en molts països a cinquè i sisè de primària, per exemple, posarien la mateixa prova. Per al Cangur de la SCM es fan adaptacions i no es posa la mateixa prova, però alguns problemes sí que es repeteixen.

Un problema que es va proposar a cinquè i a sisè. Es va posar amb dades diferents però, essencialment, és el mateix problema. Compareu els resultats:

- Problema 14 a cinquè: encert 15,61 %; error 69,97 %; en blanc 14,43 %
- Problema 13 a sisè: encert 28,99 %; error 50,67 %; en blanc 20,34 %

14. Al nord de la carretera **A** trobem 7 cases, a l'est de la carretera **B** en trobem 8 i al sud de la carretera **A** només n'hi ha 5. Quantes cases hi ha a l'oest de la carretera **B**?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

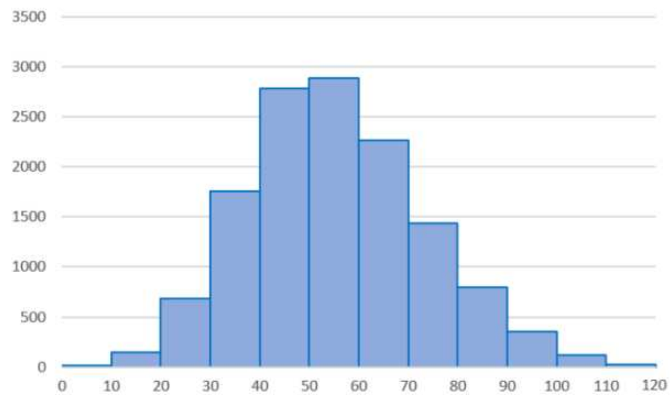
Amb les dades de quantes cases hi ha al nord de la carretera A i quantes al sud podem deduir el nombre total de cases, que són 12. Aleshores, sabent les que hi a a l'est de la carretera B deduim de seguida les que hi ha a l'oest: $12 - 8 = 4$.

28è Cangur de la SCM. Sisè d'Educació Primària

Nombre de participants: 13 549

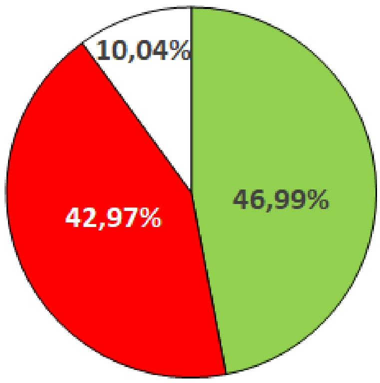
Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 427

Millor puntuació (sobre 120): 120 punts
Percentil del millor 1%: 100,00 punts
Percentil del millor 6%: 85,0 punts
Percentil del millor 10%; 79,50 punts
Quartil del millor 25%: 66,5 punts
Mediana: 53,75 punts
Mitjana: 55,17 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
20,11 + 19,72 + 15,34 punts



Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	65,93%	47,42%	27,63%
error	28,75%	43,05%	57,10%
en blanc	5,32%	9,53%	15,27%

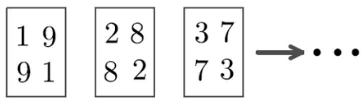


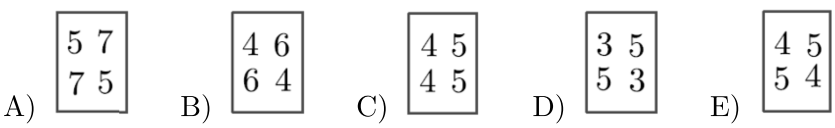
Anàlisi d'alguns problemes

En general els primers problemes de 3 punts han de ser, segons la idea del "Cangur", problemes "fàcils", a l'abast de tothom. Així ha estat amb el problema 3 que obté els percentatges més favorable de resultats:

- Problema 3: encert 92,87 %; error 6,46 %; en blanc 0,67 %

3. Tenim una sèrie ordenada de targetes. Quina serà la targeta següent de la sèrie?



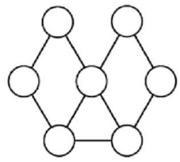


A dalt a l'esquerra veiem 1, 2, 3. Es pot pensar que a dalt a l'esquerra de la targeta següent hi ha d'anar el 4. A baix a la dreta exactament el mateix.
A dalt a la dreta 9, 8, 7. Tot sembla indicar que a dalt a la dreta correspon el 6.
A baix a l'esquerra ben bé això mateix que acabem de dir.
Raonablement, doncs, la resposta és la B), tal com va veure pràcticament tothom.

Però en un dels problemes de 3 punts aquesta idea va fallar. El problema 5 va tenir un percentatge d'error molt significatiu respecte la resta de problemes amb la mateixa puntuació:

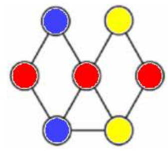
- Problema 5: encert 36,21 % ; error 55,02 %; en blanc 8,77 %.

5. La Nora vol pintar els cercles de la figura. Si pinta de colors diferents dos cercles que estan connectats per un segment, quina és la quantitat mínima de colors que necessita per a pintar-los tots?



A) 2 colors B) 3 colors C) 4 colors D) 5 colors E) 6 colors

Si mirem el triangle que té de vèrtexs els dos cercles inferiors i el central podem assegurar que, com a mínim, necessitarem tres colors diferents. La imatge de la dreta demostra que amb tres colors ho podem fer.

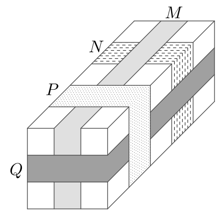


Per altra banda podem comentar un problema (proposat des de Catalunya per al Cangur internacional) que va tenir un tant per cent d'encert destacat respecte el del seu grup de problemes: el problema 10 en el conjunt dels problemes de 4 punts.

- Problema 10: encert 75,21 % ; error 22,11 %; en blanc 2,69 %.

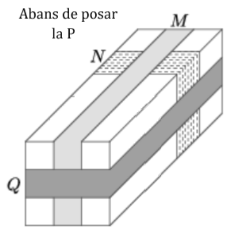
Aquest problema també va ser proposat a 1r d'ESO, problema 5, i els percentatges van ser molt semblants: respectivament 77,40 %, 20,70 % i 1,90 %.

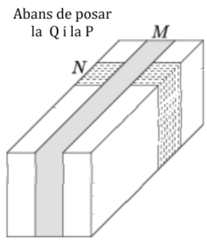
10. En la figura podem veure un paquet en el qual es van col·locar quatre cintes, M, N, P i Q. De la primera a l'última, en quin ordre es van col·locar?



A) M, N, Q, P B) N, M, P, Q C) N, Q, M, P
D) N, M, Q, P E) Q, N, M, P

Si ens fixem que la cinta P tapa la Q i la M i aquesta tapa la N, queda clar que la darrera cinta posada ha de ser la P. Si ens ho imaginem sense la P deduirem que la pnúltima a ser posada ha de ser la Q. I ja podem dir que la resposta és la D).





Els problemes 11 i 24 (un de 4 punts, l'altre de 5) han obtingut uns percentatges similars:

- Problema 11 : encert 15,86 %; error 72,49 %; en blanc 11,66 %
- Problema 24: encert 15,05 %; error 70,56 %; en blanc 14,39 %

El 24 és un problema de raonament lògic acurat i en l'11 pot ser que fallés una mica la lectura amb lògica de l'enunciat. Aquest és el que comentem tot seguit

11. La Jasmina ha de transportar els 20 llibres d'una enciclopèdia des de la seva classe a la biblioteca de l'escola, que es troba a 40 metres. Només pot carregar 3 llibres en cada viatge. Quants metres recorrerà per a transportar tots els llibres?

A) 120 m B) 520 m C) 560 m D) 800 m E) 2 400 m

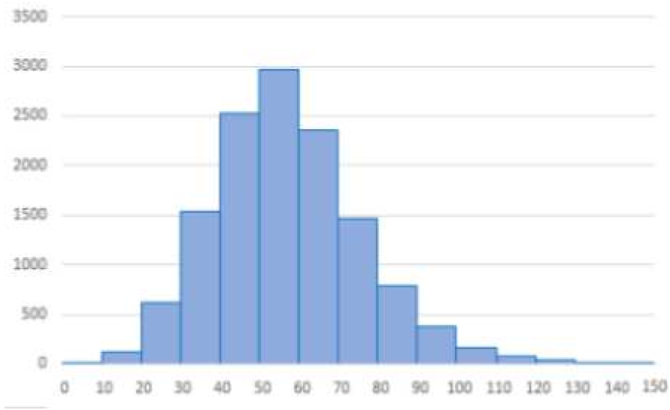
En aquest problema 11 és ràpid de raonar que ha de fer com a mínim 7 viatges per anar de la classe a la biblioteca, que amb menys no pot ser, però amb 7 sí; haurà de portar 3 llibres cada viatge i en un altre 2. Naturakment per fer aquests 7 viatges haurà de tornar 6 vegades. El lapsus lògic potser va ser pensar que també havia de tornar 7 vegades, però amb 6 ja fa perquè es pot quedar a la biblioteca. En total, doncs $13 \times 40 = 520$ m.

28è Cangur de la SCM. Primer d'ESO

Nombre de participants: 24 284

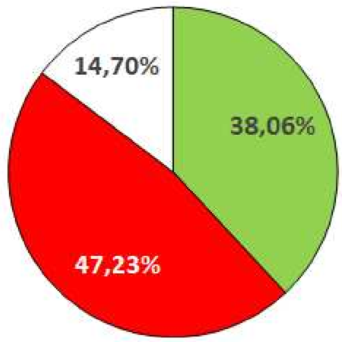
Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 643

Millor puntuació (sobre 150): 150 punts
Percentil del millor 1%: 108,75 punts
Percentil del millor 6%: 88,0 punts
Percentil del millor 10%; 81,50 punts
Quartil del millor 25%: 68,5 punts
Mediana: 55,5 punts
Mitjana: 57,11 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
24,05 + 16,00 + 17,06 punts



Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	62,87%	28,59%	22,72%
error	32,01%	54,63%	55,05%
en blanc	5,11%	16,78%	22,22%



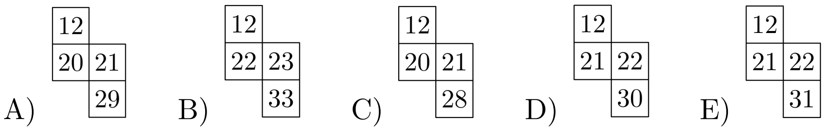
Anàlisi d'alguns problemes

Tal com s'ha observat en altres nivells, la tria dels primers problemes ha estat conseqüent amb la idea que siguin molt assequibles. Els tres primers han tingut tants per cent d'encert ben superiors al 70%, i el de resultats més favorables ha estat el primer:

- Problema 1: encert 83,77 %; error 14,53 %; en blanc 1,70 %

1. En Blai ha començat a omplir una graella de 40 caselles escrivint un nombre en cada casella, tal com es mostra a la dreta. Si emplena tota la graella de la mateixa forma, quina de les peces següents podrà retallar de la graella?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12				

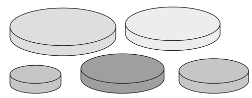


Només cal observar la distància que hi ha d'haver entre un nombre i el que té just a sota. És sempre de 8 unitats, tant pels números que ja ens donen com pels que imaginem per a continuar omplint la taula.

Entre els problemes de 3 punts el que va resultar més complicat va ser el 6, amb un alt tant per cent d'errors.

- Problema 6: encert 29,20 % ; error 60,64 %; en blanc 10,16 %.

2. L'Anna té cinc discos, tots de diàmetre diferent, i vol construir una torre amb quatre dels cinc discos de manera que cada disc sigui més petit que el que té just a sota. Quantes torres diferents pot construir l'Anna?



A) 20 B) 12 C) 9 D) 5 E) 4

Aquest problema és anàleg a un de cinquè de primària, que allà també va provocar molts errors, com ja s'ha comentat. Podem assimilar-lo al recompte de quants nombres de quatre xifres podem escriure, amb les xifres triades entre 1, 2, 3, 4 i 5, i escrites sempre en aquest ordre. Només cal triar quin nombre no posem i, per tant, la resposta és 5.

Problema amb el percentatge més gran d'error:

- Problema 14: encert 15,22 %; error 78,58 %; en blanc 6,20 %

14. La Maria, en Pere, en Ricard i la Tina estaven jugant a futbol a classe i amb un xut van trencar un vidre. Quan la directora estava intentant esbrinar qui havia trencat el vidre, va obtenir les respostes següents: Maria: «Va ser en Pere»; Pere: «Va ser en Ricard»; Ricard: «No vaig ser jo»; Tina: «No vaig ser jo». Només un dels infants deia la veritat. Qui va fer el xut que va trencar el vidre?

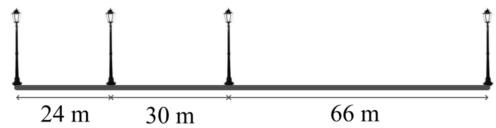
A) La Tina B) En Ricard C) En Pere D) La Maria
E) No es pot determinar amb la informació que es dona.

Aquest problema és anàleg al 24 de sisè, que en aquell nivell ja hem comentat que també va tenir molt poc encert, però no n'hem escrit la idea per a la solució. És aquesta: si ens adonem que en Pere i en Ricard diuen coses contradictòries és segur que un dels dos ha de dir la veritat. Per tant la Tina menteix i això la delata.

Problema amb el percentatge més petit d'encert:

- Problema 20 model A, 19 model B: encert 11,94 %; error 62,39 %; en blanc 25,66 %

20. En un carrer de 120 m de llarg hi ha quatre fanals: un al principi, un altre al final i dos enmig, situats a les distàncies que es poden veure en la figura. Quin és el nombre mínim de nous fanals que caldrà instal·lar perquè cada dos fanals consecutius quedin tots a la mateixa distància?



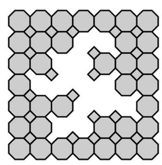
A) 12 B) 15 C) 17 D) 20 E) 37

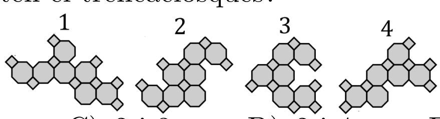
El màxim comú divisor de les tres distàncies, que és 6, ens diu la màxima separació que podrem aconseguir posant els nous fanals. Sabent aquesta separació ja podem comptar quants fanals nous caben en cada zona del carrer, però amb molta atenció: per exemple en la zona de 24 hi ha 4 espais de 6 metres, però per a determinar-los només s'han de posar 3 fanals.

Vegem per acabar aquesta petita anàlisi un problema que és una sorpresa per l'alt tant per cent d'encert:

- Problema 15 : encert 72,58 %; error 24,06 %; en blanc 3,35 %.

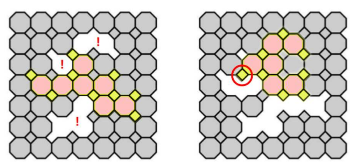
15. Quines dues peces completen el trencaclosques?





A) 1 i 2 B) 1 i 4 C) 2 i 3 D) 2 i 4 E) 3 i 4

La peça 1 deixa tres zones desconnectades i la peça 3 no encaixa bé: Podeu veure que amb la 2 i la 4 sí que es pot assolir l'objectiu.

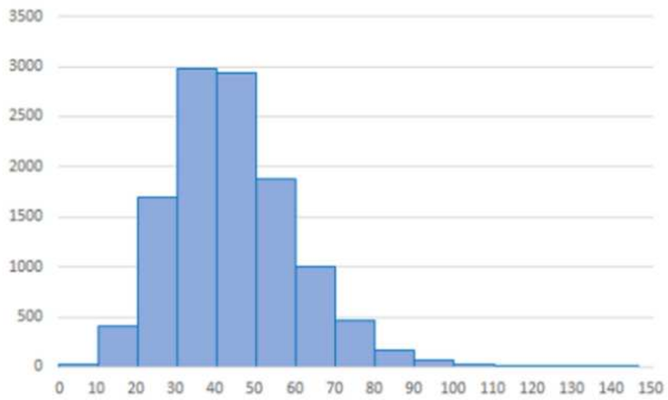


28è Cangur de la SCM. Segon d'ESO

Nombre de participants: 21 820

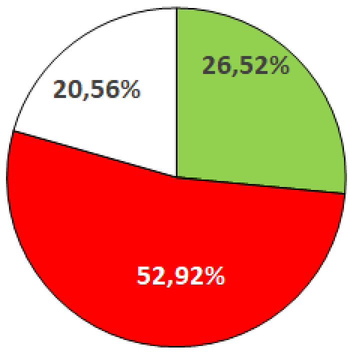
Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 653

Millor puntuació (sobre 150): 145 punts
Percentil del millor 1%: 87,75 punts
Percentil del millor 6%: 69,5 punts
Percentil del millor 10%; 63,75 punts
Quartil del millor 25%: 42,25 punts
Mediana: 52,5 punts
Mitjana: 43,66 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
15,60 + 13,36 + 13,70 punts



Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	38,92%	23,16%	17,48%
error	48,90%	57,94%	51,93%
en blanc	12,19%	18,90%	30,58%

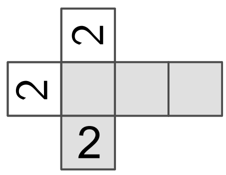


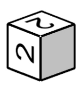
Anàlisi d'alguns problemes

No es pot començar aquesta anàlisi sense constatar que la proposta de l'equip de treball de la reunió internacional per a aquest nivell i l'adaptació que en va fer la comissió Cangur a Catalunya no van ser del tot reeixides per a la idea-clau de la prova Cangur. Especialment, potser, pel que fa al primer grup de problemes, però també per a la globalitat del conjunt d'enunciats. És així que el problema amb més encert va tenir aquests percentatges:

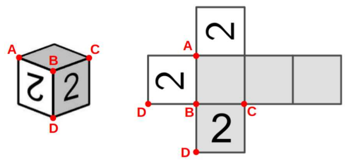
- Problema 2 model A, 1 model B: encert 59,54 %; error 36,30 %; en blanc 4,16 %

2. La Rosa té un paper retallat com en la figura de la dreta, que es pot plegar formant un cub. Quin dels cinc cubs següents es pot obtenir amb el desplegable de la Rosa?



A)  B)  C)  D)  E) 

Les figures de la dreta fan visual la solució. Resposta correcta: A)



Fins i tot en el marc del que ja s'ha indicat, de la dificultat global de la prova, comentem un problema que és una sorpresa absoluta pel percentatge d'error i el poc encert:

- Problema 10 del model A, 9 del model B: encert 9,23 %; error 65,56 %; en blanc 25,21 %

Aquest problema és anàleg a un que es va proposar a sisè de primària (problema 20) i en aquell cas el conjunt de respostes va ser més reeixit: encert 20,97%, error 47,70%, en blanc 31,33%.

3. L'Anna, en Biel, la Cecília, en Dani i l'Erica van escrivint, per torns, els successius múltiples de 7. L'Anna escriu $7 \times 1 = 7$, en Biel $7 \times 2 = 14$, la Cecília $7 \times 3 = 21$, i així successivament; després d'en Dani i l'Erica continuen l'Anna, en Biel, etc. Al cap de molta estona algú escriu un nombre del qual veiem les dues primeres xifres i les dues últimes. Qui l'ha escrit?

A) L'Anna B) En Biel C) La Cecília D) En Dani E) És impossible saber-ho del cert.

La clau per a trobar la solució consisteix en fixar-se en la darrera xifra dels nombres que van escrivint. Les terminacions dels múltiples de 7 es repeteixen cíclicament cada 10 (a saber 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, **3**, 0.) Així, com que hi ha 5 persones, cadascuna escriu sempre una terminació i a la volta següent que li toca n'escriu una altra, però sempre les dues mateixes. Amb una llista (que podem resumir A, B, C, D, E, A, B, C, **D**, E) de seguida veiem qui escriurà sempre la terminació 3.

Problema que també sorprèn negativament, en especial en aquest cas pel percentatge de no resposta. El cas és que es tracta d'un problema d'un estil que s'acostuma a treballar a les aules.

- Problema 12 model A, 11 model B : encert 12,67 %; error 48,68 %; en blanc 38,65 %

12. En la multiplicació de la dreta, les lletres A, B, C, D i E representen xifres diferents. Si la multiplicació és correcta, quin és el valor de $A + B + C$?

$$\begin{array}{r} 1ABCDE \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline ABCDE1 \end{array}$$

A) 15 B) 20 C) 21 D) 17 E) 14

Perquè el producte acabi en 1, la E ha de ser 7 i ens n'emportem 2. Seguim: D ha de ser 5 perquè $3 \times 5 + 2$ acaba en 7 (E), i ens n'emportem 1. Continuant el mateix procediment arribarem fins al final i trobarem successivament $C = 8$, $B = 2$ i $A = 4$ i la resposta demanada és, doncs, la E).

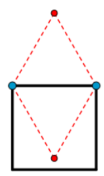
Acabem amb la referència a dos problemes de geometria de 5 punts. El problema 22, que va ser el millor dels problemes del tercer terç, tot i que calia una bona visió espacial, i el 24, que va ser el de resultats més pobres de tota la prova, però en aquest cas ja estava pensat que seria un problema ben difícil. D'aquest segon comentem les idees per a la solució

- Problema 22: encert 37,45 %; error 38,85 %; en blanc 23,70 %
- Problema 24: encert 5,69 %; error 63,35 %; en blanc 30,96 %

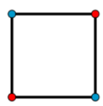
24. Els costats d'un quadrat mesuren 1 cm de longitud. Quants punts del pla estan exactament a 1 cm de distància de dos dels vèrtexs d'aquest quadrat?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Per a cada una de les quatre parelles de vèrtexs consecutius (és a dir les parelles de punts que determinen un costat del quadrat) li corresponen dos punts que es troben al tercer vèrtex dels dos triangles equilàters construïts sobre aquest costat, un per dins i un altre per fora del quadrat. Com que hi ha quatre parelles d'aquestes fins aquí tenim 8 punts que compleixen l'enunciat.



Per altra banda, a cada una de les parelles de vèrtexs oposats del quadrat els corresponen els altres dos vèrtexs del quadrat. Vegeu la figura. Com que parelles de vèrtexs oposats del quadrat n'hi ha dues, tindrem 4 punts més que compleixen l'enunciat.



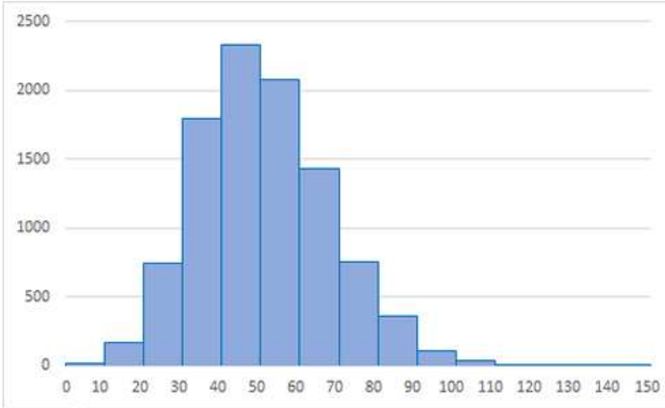
La resposta correcta és que hi ha 12 punts que compleixen l'enunciat.

28è Cangur de la SCM. Tercer d'ESO

Nombre de participants: 18 479

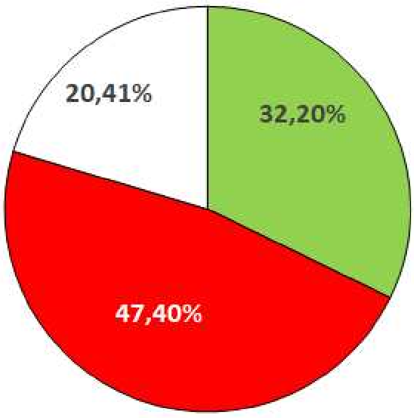
Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 648

Millor puntuació (sobre 150): 142,25 punts
Percentil del millor 1%: 95,0 punts
Percentil del millor 6%: 78,5 punts
Percentil del millor 10%; 72,75 punts
Quartil del millor 25%: 61,00 punts
Mediana: 48,75 punts
Mitjana: 50,37 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
19,93 + 16,14 + 14,30 punts



Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

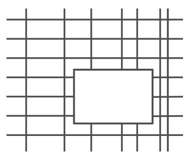
	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	51,88%	28,38%	16,34%
error	40,78%	51,00%	50,40%
en blanc	7,34%	20,62%	33,26%

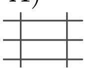
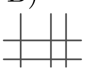
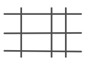
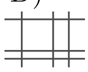
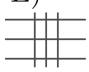


Anàlisi d'alguns problemes

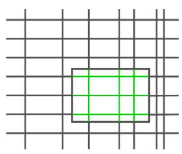
Sembla que la comissió va encertar amb la tria del primer problema, que va ser el que va tenir el tant per cent més gran d'encert i el més petit d'error: encert 91,99 %; error 7,50 %; en blanc 0,52 %

1. El diagrama de la dreta mostra un conjunt de línies verticals i horitzontals. Com veieu al diagrama li falta una part. Quina de les següents propostes de sota és la part que li falta?



A)  B)  C)  D)  E) 

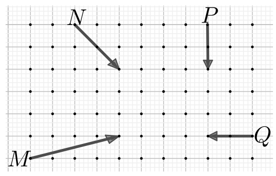
Només cal completar el dibuix per adonar-se que la resposta correcta és la C.



Dos problemes que són una sorpresa pel tant per cent d'error.

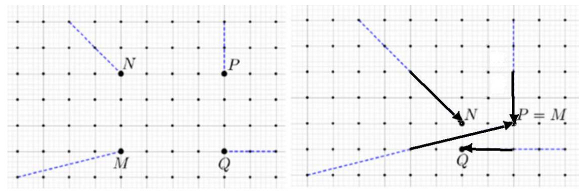
- Problema 8 : encert 27,10 %; error 70,11 %; en blanc 2,79 %

8. El diagrama mostra la posició inicial, la direcció i quina distància recorren quatre autos de xoc en cinc segons. Si segueixen aquests moviments, quins dos autos toparan primer?



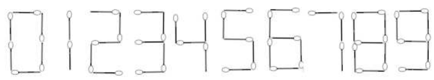
A) M i N B) M i P C) M i Q D) N i P E) P i Q

Dibuixem la posició dels autos als 5 i als 10 segons, i de seguida veiem quins dos són els que topen.



- Problema 10 model A, 9 model B : encert 15,90 %; error 72,78 %; en blanc 11,32 %

10. Utilitzem llumins com aquest per a formar xifres tal com mostra la figura. Quants nombres enters positius diferents es poden formar utilitzant exactament sis llumins d'aquesta manera?



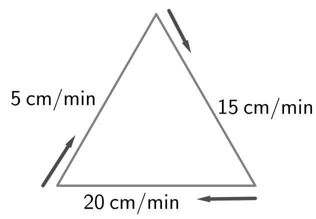
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

Pensem com podem trobar 6 llumins: $2+4$, $4+2$, $3+3$ i $2+2+2$. Observem que l'1 és l'únic amb dos llumins, el 7 l'únic amb tres, el 4 l'únic amb quatre i el 0, 6 i 9 amb sis. Tindrem: nombres d'una xifra, el 6 o el 9; nombres de dues xifres, el 14, el 41 o el 77, i nombres de 3 xifres, només el 111. La resposta, doncs, és 6.

El problema amb el tant per cent més petit d'encert.

- Problema 22 model A, 21 model B: encert 5,90 %; error 74,69 %; en blanc 19,40 %

21. Una formiga camina pels costats d'un triangle equilàter. Les velocitats a les quals va quan passa per cada costat són 5 cm/min, 15 cm/min i 20 cm/min, tal com es mostra en la figura. Quina és la velocitat mitjana de la formiga en cm/min quan fa tot el perímetre del triangle?



A) 10 B) $\dfrac{80}{11}$ C) $\dfrac{180}{19}$ D) 15 E) $\dfrac{40}{3}$

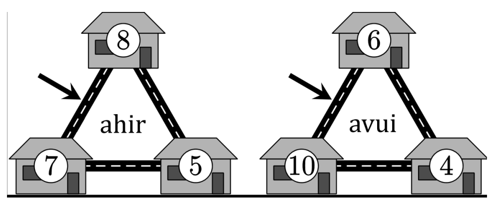
Només cal dividir la distància total ($3x$) entre el temps total ($\frac{x}{5}+\frac{x}{15}+\frac{x}{20}=\frac{19x}{60}$), on x és la mesura d'un costat del triangle, i simplificar la fracció obtinguda.

Una altra possibilitat és pensar el problema per a una longitud del costat que pugui convenir. En aquest cas podem prendre 60 cm, que és múltiple de les tres velocitats. Així es veu que la resposta és C).

Acabem aquesta anàlisi amb un problema que pot ser interessant.

- Problema 26 model A, 25 model B: encert 16,87 %; error 47,76 %; en blanc 35,37%.

25. Uns ratolins viuen en tres cases veïnes. Ahir a la nit tots els ratolins van canviar de casa i ho van fer seguint el camí més curt. El diagrama mostra el nombre de ratolins a cada casa ahir i avui. Quants ratolins han passat pel camí que indica la fletxa.



A) 8 B) 11 C) 12 D) 16 E) 19

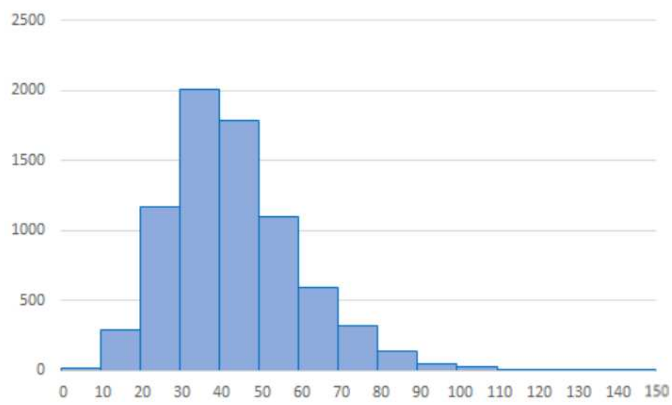
Si els 8 ratolins de la casa de dalt i els 7 de la casa de l'esquerra haguessin anat tots cap a la casa de la dreta, aquesta casa en comptes d'acabar amb 4 hauria acabat amb 15. Això vol dir que en sobrarien 11: són els que han passat pel camí assenyalat.

28è Cangur de la SCM. Quart d'ESO

Nombre de participants: 13 991

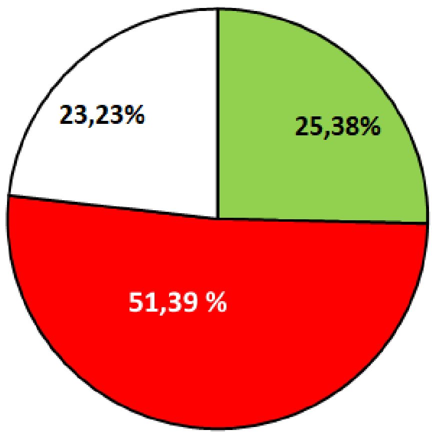
Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 596

Millor puntuació (sobre 150): 150 punts
Percentil del millor 1%: 90,25 punts
Percentil del millor 6%: 71,0 punts
Percentil del millor 10%; 65,00 punts
Quartil del millor 25%: 52,5 punts
Mediana: 41,25 punts
Mitjana: 43,22 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
13,84 + 14,41 + 14,97 punts



Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

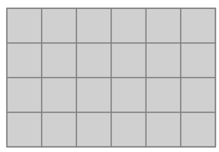
	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	34,69%	24,91%	16,53%
error	52,93%	56,01%	45,23%
en blanc	12,38%	19,08%	38,24%



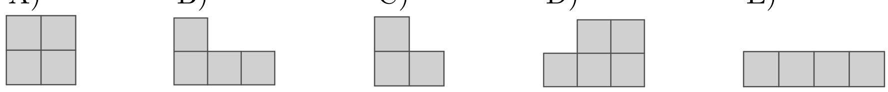
Anàlisi d'alguns problemes

En aquest nivell el problema que va tenir el tant per cent més gran d'encert i el més petit d'error va ser l'1 del model A, que era el 2 del model B: encert 65,03 %; error 30 %; en blanc 4,97 %

1. Un paleta vol enrajolar un terra que fa 4×6 m amb peces de ceràmica totes iguals. No les vol sobreposar ni deixar-hi forats. Quina de les peces de ceràmica següents, compostes cada una de rajoles quadrades d'1×1 m, no podrà usar?



A) B) C) D) E)

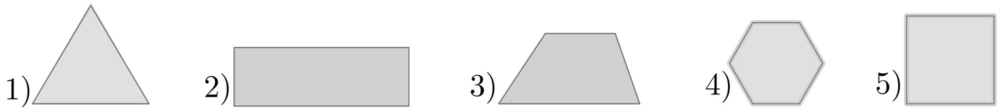


Per trobar la peça "impossible" només cal cercar-ne una que contingui un nombre de quadradets que no sigui divisor de 4×6.

En canvi va ser una sorpresa pel **tant per cent d'error** el problema 2 del model A, 1 del model B:

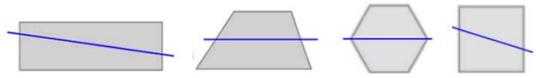
- encert 9,72 %; error 73,82 %; en blanc 6,46 %

2. Observeu els polígons que hi ha aquí sota. Quins es poden dividir en dos trapezis amb una línia recta?



A) Només el 3 B) Només el 3 i el 4 C) El 2, el 3 i el 4, però l'1 i el 5, no
D) L'1, el 3 i el 4, però el 2 i el 5, no E) Tots excepte el de la figura 1

Una recta pot tallar un triangle en dos triangles (en cas que passi per un vèrtex) o en un quadrilàter i un triangle, però mai en dos quadrilàters. Vegeu la resta de peces.



Un altre problema que va provocar un alt **percentatge d'error**, que pot sorprendre:

- Problema 10: encert 13,42 %; error 75,82 %; en blanc 10,76 %

10. L'Helena i l'Ivan tenen monedes de 20 i 50 cèntims d'euro. Helena té 64 monedes de 20 cèntims i algunes de 50 cèntims. L'Ivan té 104 monedes de 20 cèntims i algunes de 50 cèntims. Sabem que tots dos tenen exactament el mateix nombre de monedes. Quants euros té l'Helena més que l'Ivan?

A) 0 B) 8 C) 12 D) 20

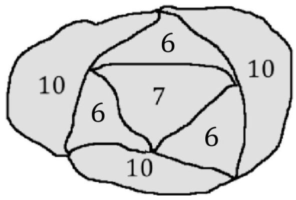
E) Depèn del nombre de monedes de 50 cèntims que tinguin.

Com que l'Helena té 40 monedes menys de 20 cèntims que l'Ivan, en té 40 més de 50 cèntims. Per tant, té $40 \times 50 - 40 \times 20$ cèntims més que ell.

Problema de 5 punts que és una sorpresa pel percentatge d'encert.

- Problema 29 model A, 27 model B: encert 35,02 %; error 31,82 %; en blanc 33,16 %

29. La figura mostra el plànol d'un parc. El parc està dividit en regions, el perímetre de les quals està indicat amb el nombre que hi ha a dins. Quin és el perímetre exterior del parc, en les mateixes unitats que totes les dades?



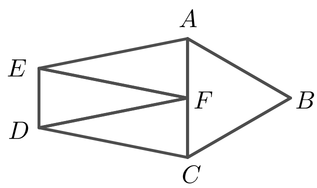
A) 12 B) 18 C) 23 D) 25 E) Cap de les anteriors

Si fem $10 + 10 + 10 + 7$ hem comptat un sol cop tots els segments, tant interiors com exteriors. Ara només cal restar $6 + 6 + 6$ per descomptar els interiors i que quedin només els exteriors.

Un problema que va agradar.

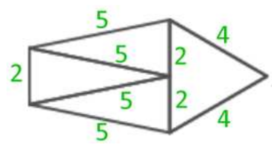
- Problema 23 model A, 22 model B: encert 16,07 %; error 40,36 %; en blanc 43,57 %

23. El pentàgon $ABCDE$ està dividit en quatre triangles d'igual perímetre. El triangle ABC és equilàter i AEF, EFD i FDC són triangles isòsceles idèntics. Quina és la raó entre el perímetre del pentàgon $ABCDE$ i el del triangle ABC?



A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

Podem pensar un possible valor per als costats del triangle equilàter i això ens permet deduir les altres mesures. En general, per complir les condicions de l'enunciat, els segments han de ser proporcionals als nombres de la figura.

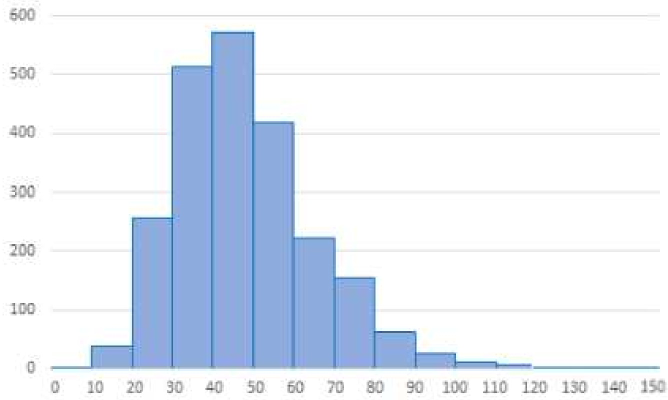


28è Cangur de la SCM. Primer de batxillerat i CFGM

Nombre de participants: 4 678 + 15 = 4 693

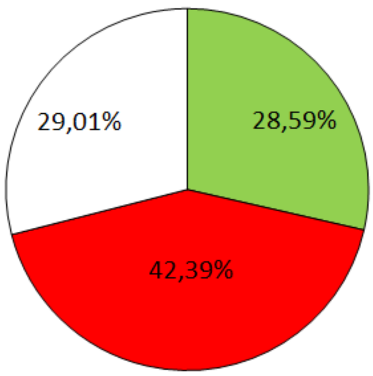
Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 351

Millor puntuació (sobre 150): 143,75 punts
Percentil del millor 1%: 100,00 punts
Percentil del millor 6%: 77,0 punts
Percentil del millor 10%; 65,00 punts
Quartil del millor 25%: 58,5 punts
Mediana: 45,00 punts
Mitjana: 47,50 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
19,06 + 15,19 + 13,25 punts



Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	48,47%	25,39%	11,92%
error	39,09%	47,86%	40,24%
en blanc	12,44%	26,75%	47,84%



Anàlisi d'alguns problemes

En aquest nivell, com en molts altres, s'ha donat una cosa ben lògica.

El problema que obté el percentatge més alt d'encert, més baix d'error i també més baix de respostes en blanc és el problema 1:

- Problema 1: encert 89,86 %; error 9,62 %; en blanc 0,52 %

I, alhora, el problema amb el percentatge més petit d'encert i un gran nombre de respostes en blanc, és el problema 30.

- Problema 30: encert 5,29 %; error 39,44 %; en blanc 55,27 %

Els problemes amb el **tant per cent més gran d'error**:

- Problema 9: encert 8,75 %; error 76,17 %; en blanc 15,09 %
- Problema 11: encert 6,86 %; error 79,10 %; en blanc 14,04 %

9. De quantes maneres diferents podem donar valors enters positius a la parella de nombres a i b, de manera que la igualtat $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$ sigui certa?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Ha de ser $a \cdot b = 35$. La lista de divisors de 35 és $\{1, 5, 7, 35\}$ i aleshores hi ha quatre possibles parelles ordenades per a (a, b), a saber (1, 35), (5, 7), (7, 5), (35, 1).

11. La Joana vol estalviar aigua. Ha reduït el temps de la dutxa en una quarta part i també ha reduït el cabal d'aigua que raja en una quarta part. En quant ha reduït l'aigua que gasta a cada dutxa?

A) En $\frac{1}{4}$ B) En $\frac{3}{8}$ C) En $\frac{1}{16}$ D) En $\frac{5}{12}$ E) En $\frac{7}{16}$

A causa de les reduccions que ha fet, la quantitat d'aigua que gastarà ara seran $\frac{3}{4}$ parts de $\frac{3}{4}$ parts (o bé el 75% del 75%). Per tant, la reducció total serà el que falta per arribar a 1 (o bé al 100%). Calculem-ho: $1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$.

Problema amb el percentatge més gran de respostes en blanc:

- Problema 27: encert 6,52 %; error 31,70 %; en blanc 61,78 %

27. Quants nombres enters positius de tres xifres hi ha amb la propietat que si restem del nombre la suma de les seves xifres, el resultat és un nombre de tres xifres amb les tres xifres iguals?

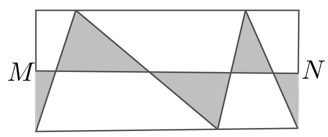
A) 2 B) 3 C) 8 D) 20 E) 30

Si el nombre s'escriu $N = abc$ aleshores és $N = 100a + 10b + c$ i si li restem $a + b + c$ obtenim $99a + 9b$ que ha de ser un nombre de tres dígits iguals, és a dir de la forma $111p$. Si escrivim l'equació corresponent i la simplifiquem obtenim $3 \cdot (11a + b) = 37p$. Com que 37 i 3 són primers entre ells, p ha de ser múltiple de 3. Si ho analitzem, amb $p = 3$ veurem que ha de ser $a = 3$ i $b = 4$ i c el valor que vulguem; amb $p = 6$ també trobem 10 valors, i finalment amb $p = 9$ no n'hi ha cap.

Un problema **bonic**, que tal vegada va donar més respostes errònies que les que es podia esperar a priori.

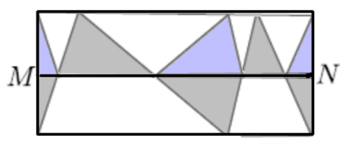
- Problema 14: encert 20,41 %; error 58,81 %; en blanc 20,78 %

14. Els punts M i N són els punts mitjans de dos costats oposats del rectangle de la figura. Quina fracció de l'àrea del rectangle és de color gris?



A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Si fem una simetria dels tres triangles inferiors respecte la paral·lela mitjana veurem que la suma de les àrees dels triangles és igual a la base del rectangle, i que l'altura dels triangles és la meitat de la del rectangle. Per tant la suma de les àrees serà la quarta part de l'àrea del rectangle.

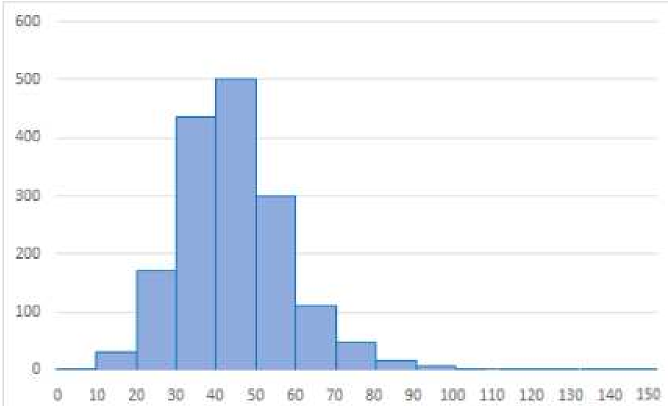


28è Cangur de la SCM. Segon de batxillerat i CFGS

Nombre de participants: 3 346

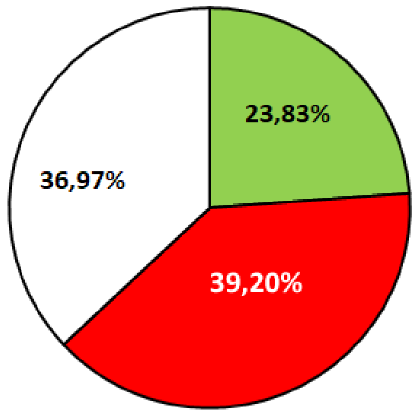
Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 287

Millor puntuació (sobre 150): 143,75 punts
Percentil del millor 1%: 86,25 punts
Percentil del millor 6%: 66,25 punts
Percentil del millor 10%; 61,25 punts
Quartil del millor 25%: 51,75 punts
Mediana: 43,0 punts
Mitjana: 44,29 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
16,34 + 13,40 + 14,56 punts



Percentatges d'encerts per grups de problemes i globalment

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	39,24%	19,04%	13,22%
error	37,94%	42,87%	36,78%
en blanc	22,83%	38,10%	49,99%



Anàlisi d'alguns problemes

El problema que va tenir el tant per cent més gran d'encert va ser el 2. Però tot i així també hi va haver nombroses errades: encert del 73,40 %; error 25,74 %; en blanc 0,86 %.

2. La Júlia tira 5 daus i obté un total de 19 punts. Quin és el nombre màxim de sisos que pot haver tret?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

L'errada més observada va ser la resposta 3, però si traiem tres 6 només falta un punt per a 19, i no hauríem pogut tirar cinc daus. Amb dos sisos sí que pot ser, per exemple $6+6+3+2+2$.

Entre els problemes de 3 punts n'hi va haver dos que van provocar percentatges d'encert molt més baixos del que, en principi, s'espera per a problemes de 3 punts.

- Problema 7: encert 9,71 %; error 47,42 %; en blanc 42,87 %
- Problema 6: encert 9,46 %; error 66,65 % ; en blanc 10,76% Aquest problema 6 també va ser el de més errors. Vegem-lo.

6. Quants triangles diferents hi ha de perímetre 10 cm i amb la longitud de cadascun dels seus costats un nombre enter?

A) 5 B) 11 C) 6 D) 2 E) Una altra quantitat

Es tracta de trobar tres nombres enters que sumin 10, però amb el benentès que cada nombre ha de ser més petit que la suma dels altres dos perquè puguin ser els costats d'un triangle. Per tant no serveix, per exemple, $7+2+1$, i el valor màxim que haurem de considerar serà 4. Aleshores fem recompte de les possibilitats: només pot ser $4+4+2$ i $4+3+3$.

Tres problemes de 5 punts van desconcertar molt, i van donar els percentatges més alts de resposta en blanc, cosa lògica en els problemes d'aquest grau de dificultat.

- Problema 21: encert 8,17 %; error 27,33 %; en blanc 64,50 %
- Problema 27: encert 7,74 %; error 23,89 %; en blanc 68,37 %
- Problema 30: encert 7,68 %; error 29,42 %; en blanc 62,40 %

Tot seguit comentem un d'aquests problemes.

27. Quin és el màxim comú divisor de tots els nombres de la forma $n^3\,(n+1)^3\,(n+2)^3\,(n+3)^3\,(n+4)^3$, on n és un enter positiu?

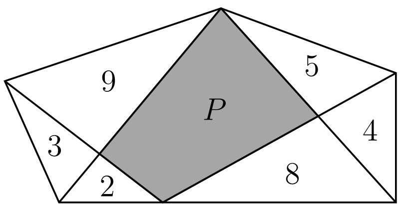
A) $2^9\,3^3$ B) $2^6\,3^3\,5^3$ C) $2^9\,3^6\,5^3$ D) $2^8\,3^2\,5^3$ E) $2^9\,3^3\,5^3$

Si n és parell també ho són $n+2$ i $n+4$ però com que busquem el màxim comú divisor hem d'anar "a assegurar" i si n és imparell aleshores només són múltiples de 2 $n+1$ i $n+3$, però com que un d'ells serà múltiple de 4 el factor 2 apareix sempre un mínim de 9 vegades. Com que de cinc nombres consecutius només podem saber amb certesa que hi haurà un múltiple de 3 i un múltiple de 5, en el màxim comú divisor hi haurà 3^3 i 5^3. Resposta E.

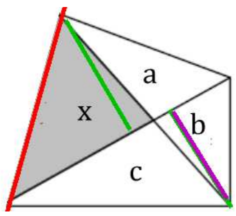
Acabem aquest recull amb el comentari d'un **problema sempre interessant**, un d'aquests problemes de vegades difícils en què, sabent les àrees d'algunes parts d'un polígon es pot deduir l'àrea que falta.

- Problema 19: encert 8,72 %; error 38,64 %; en blanc 52,64 %

19. Un pentàgon es divideix en set parts, tal com es veu en la figura. Els nombres que hi ha dins dels triangles indiquen el valor de les seves àrees. Quina és l'àrea P del quadrilàter gris?



A) 15 B) $\frac{31}{2}$ C) 16 D) 17 E) Cap de les anteriors



Podem descompondre el pentàgon i, alhora, el quadrilàter ombrejat en dos quadrilàters i aplicar un resultat que ha estat útil en diverses ocasions en el marc del Cangur (començant per un problema del Cangur 1996) que ens diu que per a un quadrilàter descompost en quatre triangles per les dues diagonals sempre es compleix $a \cdot c = b \cdot x$. Per a demostrar-ho podeu escriure les àrees del triangle d'àrea a i del triangle x que busquem en funció de l'altura dibuixada de color verd, i les dels triangles d'àrees b i c en funció de l'altura de color morat, i naturalment de les bases que coincideixen per al triangle a i el triangle b i també per al triangle c i el triangle x...i ho deduireu!!!

La prova Cangur 2023 ha pogut recuperar, per al Cangur de batxillerat i cicles formatius,

la celebració en seus on es reuneixen alumnes de diversos centres**.**

Gràcies!!!

RODONETES 3D

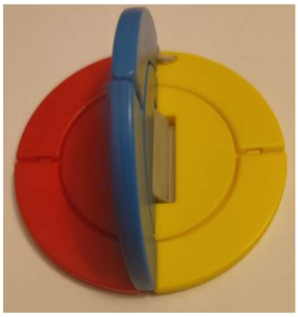
Un trencaclosques geomètric que ens arriba de l'equip del Cangur dels Països Baixos

El joc, que s'ofereix com a complement del premi del Cangur i com un detall per a les mencions de l'1% és una simplificació del **Roundy**, un trencaclosques senzill però amb moltes possibilitats de joc.

La versió que es presenta consisteix en tres semicercles de colors (vermell, groc i blau) units entre sí solidàriament i sis quadrants de corona circular, dos de cadascun dels colors anteriors.

Cada parell de semicercles es pot mantenir pla, preferentment recolzat en una superfície plana rígida, i així la cara rodona que es forma (que en direm *base*) pot tenir tres possibilitats: vermell/groc, groc/blau i blau/vermell. El tercer semicercle convé mantenir-lo perpendicular al pla format pels altres dos. Però una de les gràcies del joc és que podem canviar quin és aquest semicercle.

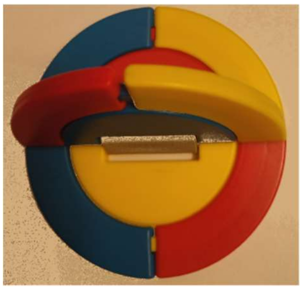
Els sis quadrants es poden encaixar al voltant dels semicercles, dos en cada semicercle i aleshores al voltant de la base queda un anell de quatre peces. Inicialment trobareu el joc ordenat de manera que les peces de cada color estan amb el seu semicercle.



Tanmateix es pot fer girar el semicercle perpendicular a la base respecte un eix perpendicular a ella, procurant mantenir en el seu lloc els quadrants de corona circular, i la disposició dels colors canviarà.
Podeu veure-ho en aquest vídeo:
https://www.cangur.org/cang2023/premis/rodonetes.mp4

Uns exemples: teniu a la dreta com quedarà la figura si fem girar 90º el semicercle blau que estava perpendicular a la base. I després hem canviat i hem fet que el cercle perpendicular a la base sigui el vermell i hem fet un altre gir.

Proposta de "*problema-Cangur*": recompte de quantes configuracions són possibles.



Com que les peces es poden separar dels semicercles i muntar-les "a mà" és clar que qualsevol configuració que es pugui imaginar serà possible. Per exemple que cap semicercle toqui a un quadrant del mateix color com a la figura de la dreta d'aquestes línies. Tanmateix, hi podríem arribar a partir de la configuració inicial sense desmuntar cap peça a mà?

De fet el trencaclosques, jugant-hi com a repte, consisteix en que una altra persona us doni una disposició com és ara la de la dreta i us demani que torneu a la configuració inicial. Serà sempre possible? Proveu-ho! Ànim!

Proposta d’activitats en record de John H. Conway

John Horton Conway (Liverpool, 26 de desembre de 1937 - Princeton, New Jersey, 11 d'abril de 2020) fou un matemàtic de vàlua reconeguda arreu del món, molt actiu en diversos camps de la matemàtica, molts d’ells relacionats amb la teoria de codis, i amb contribucions destacadíssimes en l’àmbit de les matemàtiques recreatives, en aquest cas amb una intensa relació amb Martin Gardner. Conway va passar la primera meitat de la seva carrera a la universitat de Cambridge i posteriorment es va traslladar als Estats Units, a la càtedra John Von Neumann de la Universitat de Princenton.

En aquesta publicació s’inclouen dues pinzellades sobre la seva obra, que es van treballar, amb la inestimable col·laboració del mmaca a la jornada festiva de cloenda dels Problemes a l’Esprint 2022-2023.

El joc de la vida

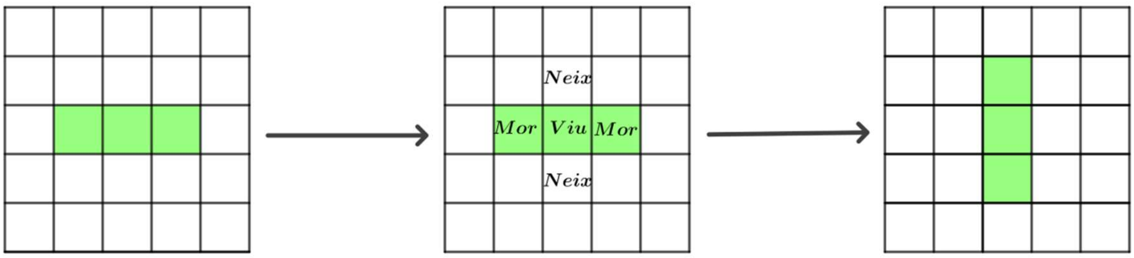
Conway va ser reconegut especialment per la invenció del *Joc de la Vida*, un dels primers exemples d’autòmat cel·lular, que ha estat font d’innombrables recerques com a simulador de processos de la vida real. Conway i Martin Gardner tenien una viva correspondència i la proposta inicial del *Joc de la Vida* la va publicar Gardner en la seva columna de *Mathematical Games* de la revista *Scientific American,* l’octubre de 1970. Aquest article va esdevenir una de les columnes més llegides mai i, instantàniament, Conway va fer-se cèlebre. Adoneu-vos, per la data, que va ser molt abans que existissin ordinadors personals, que l’experimentació inicial s’havia de fer amb paper i llapis, i goma d’esborrar! Tanmateix al llarg dels anys, a partir de múltiples articles sobre el *Joc de la Vida* i treballs d’investigació s’han creat centenars de programes d’ordinador i llocs web que permeten aprofundir l’estudi.

El *joc de la vida* es desenvolupa en un tauler quadriculat, que s’ha d’imaginar infinit, en què cada casella pot tenir una cèl·lula viva (casella acolorida) o no tenir cèl·lula (casella blanca) i les cèl·lules poden anar morint o generant cèl·lules noves a partir d’unes regles fixes. No és un “joc” en el sentit clàssic del mot perquè la situació inicial en determina completament l’evolució.

Es considera que cadascuna de les caselles del tauler és veïna de les vuit caselles que hi tenen un costat o un vèrtex en comú i aleshores les quatres regles, que s’apliquen alhora, són aquestes:

- *Tota cèl·lula viva amb menys de dos veïns vius mor (de solitud).*
- *Tota cèl·lula viva amb més de tres veïns vius mor (de sobreconcentració).*
- *Tota cèl·lula viva amb dos o tres veïns vius, segueix viva per a la següent generació.*
- *En una casella blanca que tingui exactament tres veïns vius neix una cèl·lula nova.*

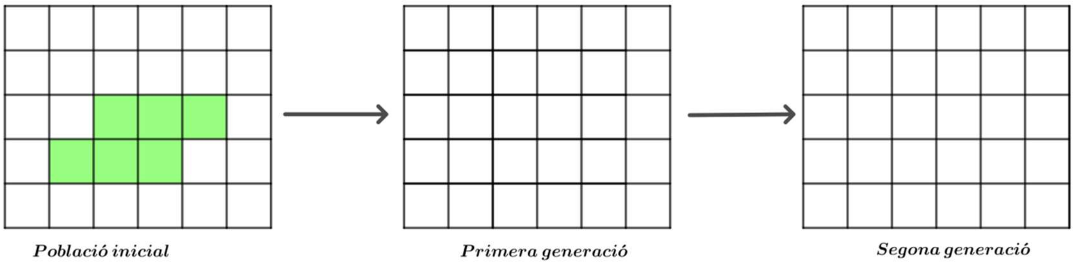
Comencem tot seguit amb alguns exemples. Analitzarem la població inicial i marcarem quines cèl·lules moren, quines segueixen vives i en quines caselles naixerà una nova cèl·lula, i així deduirem quina és la població en la primera generació.



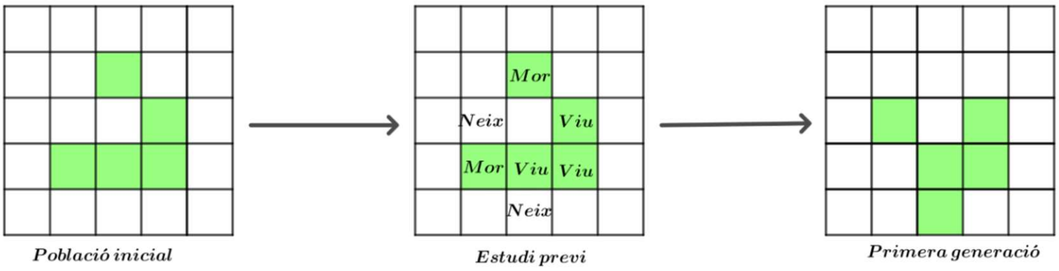
Població inicial — *Estudi previ* — *Primera generació*

Ara podeu mirar com evoluciona la primera generació de la població anterior per a obtenir la segona generació. Heu comprovat que tornem a la població inicial?

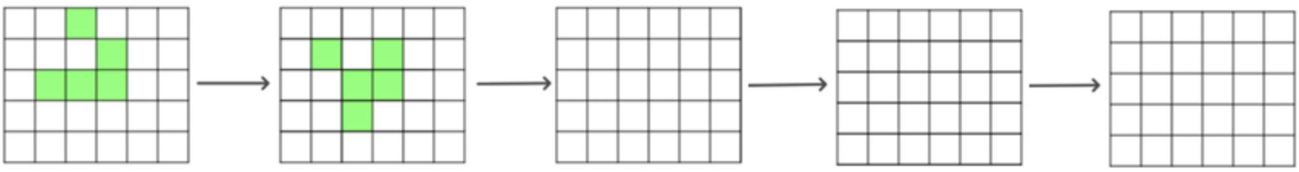
De les poblacions en què succeeix això se'n diuen *poblacions que pampallugueguen*. Comproveu que la població següent també pampallugueja.



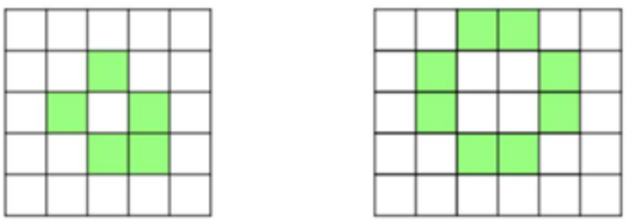
Mostrem ara el detall inicial d'una altra situació, amb el pas de la població inicial a la primera generació:



De les poblacions com la d'aquest exemple se'n diuen *planadors*. Us donem unes caselles perquè aneu dibuixant-ne noves generacions i segurament trobareu ben justificada aquesta denominació.



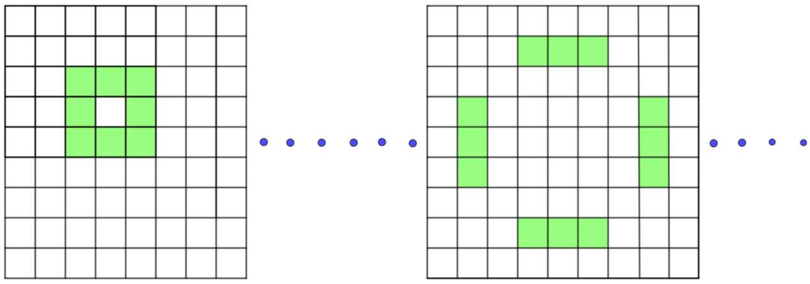
També trobem *poblacions que no canvien*. Vegeu que en els dos exemples següents que cada cèl·lula viva té dos o tres veïns vius i per tant, cap no en té menys de dos ni més de tres. Així mateix no hi ha cap casella blanca que tingui exactament tres veïns vius. Per tant la població és estàtica.



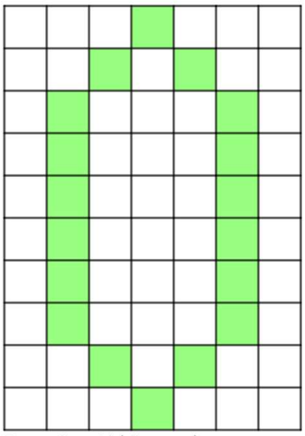
Dues poblacions vives estàtiques

No sempre és tan ràpid o immediat com en els exemples anteriors arribar a veure manualment com evoluciona una població. Tanmateix disposem de pàgines web per jugar en línia. Una possibilitat: [https://playgameoflife.com/.](https://playgameoflife.com/) També hi ha disponibles algunes app's.

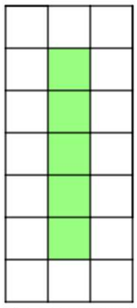
Apa doncs: amb ajut tecnològic vegeu com va evolucionant la població següent:



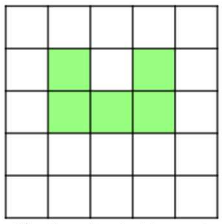
L'interès de l'estudi rau en l'anàlisi de situacions que generin un creixement indefinit, altres que potser es poden extingir completament, i altres que evolucionen cap a situacions conegudes, o al cap d'unes quantes generacions retornen a la situació inicial. Conway va escollir les regles amb cura de manera que no hi hagi una visualització immediata d'una població que creixi indefinidament tot i que n'hi ha d'haver que ho facin; igualment pel que fa a extingir-se, i també per a una població que es vagi regenerant. Incloem tot seguit la imatge d'una població que es va regenerant cíclicament (idea original: Conway) i unes altres ben especials



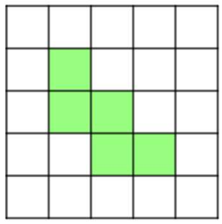
Pentadecatló (Conway)
En 15 generacions retorna a l'inicial



Passa a una població oscilant (7 generacions)

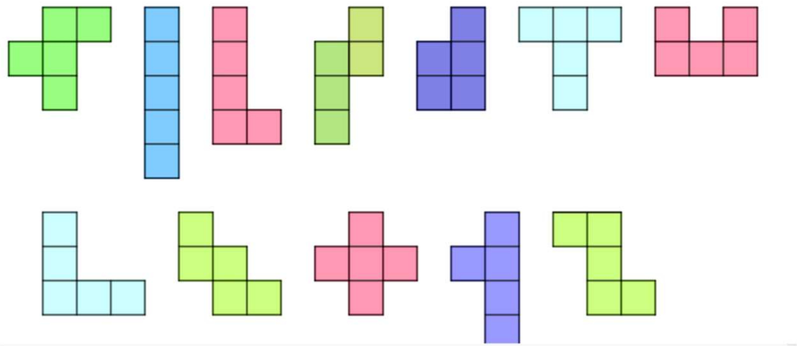


S'estingeix ràpidament



Passa ràpidament a una població estàtica

Sovint es proposa com un exercici ben interessant veure quina és l'evolució de cada una de les figures que mostrem tot seguit, els dotze pentòminos,. Ànim!!! Però si ho voleu, fer, alerta!!!...



... alerta perquè per a veure com s'estabilitza el primer pentòmino que hem dibuixat cal observar 1104 generacions (!!!)

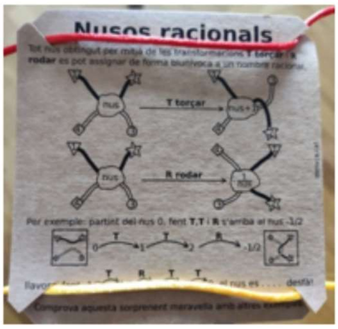
Diguem per acabar que si voleu aclarir i ampliar coneixements i jugar al joc de la vida, consulteu la pàgina web http://www.xtec.cat/~jjareno/activitats/vida/activ.htm que hi dedica el professor Joan Jareño.

Els nusos racionals de Conway

La *teoria de nusos* és una branca de la *topologia*, un camp de la matemàtica que estudia les propietats d'alguns conjunts i el fet de si es mantenen o s'alteren per algunes transformacions. Va ser un dels àmbits de treball en què Conway va destacar.

Avui us en presentem una activitat molt concreta: veurem com va imaginar Conway un sistema de numeració per a nombres racionals (enters o fraccionaris, positius o negatius) elaborat a partir de nusos fets amb dues cordes, a partir d'una plantilla inicial que representa el 0. Ës un sistema de numeració ben consistent perquè associa de manera unívoca un nus amb cada nombre, tot i que a cada situació potser s'hi pot arribar de maneres ben diverses.

L'objecte amb què es treballa és una cartolina quadrada amb quatre talls, un en cada vèrtex, i en aquests talls s'encaixen dos cordills. En direm *cartronet*. Tot i que és relativament ràpid fabricar-se'n un model per a realitzar l'activitat, amb aquesta publicació en rebeu un exemplar com el que veieu a la dreta, amb els cordills situats com correspon al nombre 0.



Per tal d'anar generant els diferents nombres es poden fer dos tipus d'accions amb els dos cordills (en les figures d'aquesta explicació un és vermell i l'altre groc), que tot seguit indiquem.

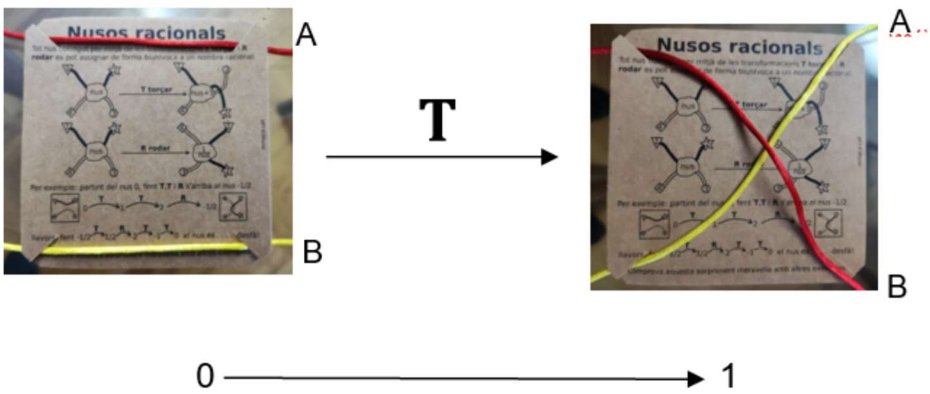
- **T** (torçar)
- **R** (rodar)

cadascuna de les quals té una traducció aritmètica pel que fa al nombre representat.

- **T** suma una unitat al nombre, és a dir passa de n a n+1.
- **R** calcula l'invers del nombre i el canvia de signe i, per tant passa de n a $-\frac{1}{n}$

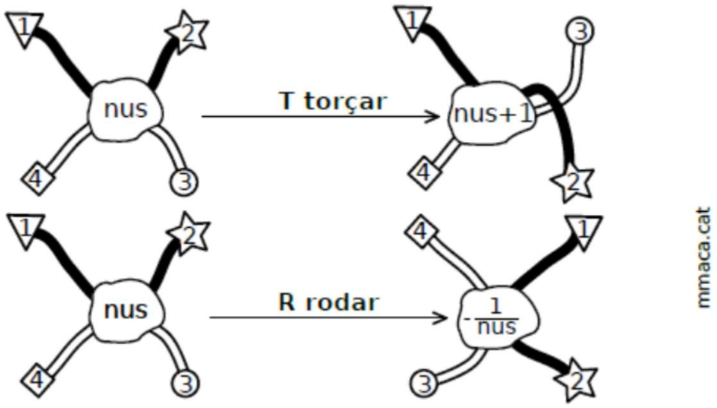
Torçar consisteix, sigui quin sigui el nus que tingueu en el cartronet, en intercanviar els cordills dels dos encaixos A i B (és a dir els dos que, si mirem frontalment el cartronet, es troben a la seva dreta) passant sempre el cordill que hi havia en l'encaix de dalt (A) per sobre del que hi havia en el de baix (B).

Vegeu un exemple de **T** en què partim del 0, i el cordill vermell passa per sobre del groc abans d'encaixar-los en B i A respectivament. I com que sumem 1, hem passat del 0 a l'1.



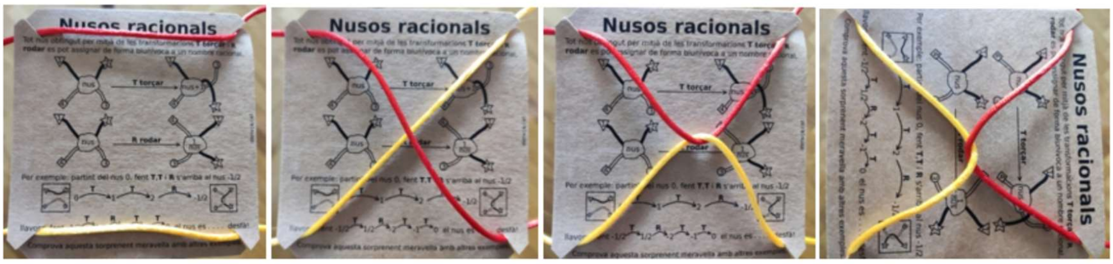
Rodar consisteix en girar 90º el cartronet, i en els exemples ho farem en el sentit de les agulles del rellotge.

En l'enganxina que il·lustra el cCartronet ho teniu resumit :



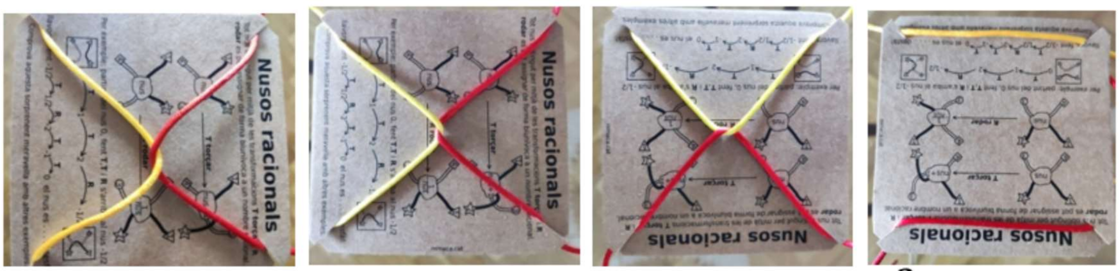
També hi teniu un exemple que tot seguit visualitzarem.

- Si partim del nus 0 i fem **T T R** s'arriba a $-\dfrac{1}{2}$



$$0 \xrightarrow{\mathbf{T}} 1 \xrightarrow{\mathbf{T}} 2 \xrightarrow{\mathbf{R}} -1/2$$

- Després es pot comprovar que si aleshores fem **T R T T**
  (que també es pot indicar **T R T**^{2}) el nus es desfà



$$-1/2 \xrightarrow{\mathbf{T}} 1/2 \xrightarrow{\mathbf{R}} -2 \xrightarrow{\mathbf{T}^2} 0$$

Aquesta característica de poder construir un nombre a partir del 0 i tot seguit veure si es pot arribar al 0, és a dir, a desfer el nus és molt interessant.

- Vegem un altre cas: Si partim del nus 0, fent **T T T R T** (**T³ R T**) s'arriba a □2/3

$$0 \xrightarrow{\mathbf{T}^3} 3 \xrightarrow{\mathbf{R}} -1/3 \xrightarrow{\mathbf{T}} 2/3$$

Us proposem com a repte que proveu de desfer el nus. Potser primer podeu pensar numèricament com es pot arribar de 2/3 a 0 sumant 1, combinat amb invertir i canviar el signe i després feu la manipulació en el cartronet. Us pot ajudar contestar les següents qüestions i tenir-les ben presents:

- Sumar 1 a una fracció positiva ens acosta o allunya de l'objectiu d'assolir el 0?
- Quina variació suposaria aplicar dues vegades $-\frac{1}{n}$ a n?

Si no reeixiu podeu consultar la part final d'aquest document.

Algunes idees més per a practicar numèricament i amb el cartronet

- Comproveu que fent **TTRTT** arribeu a 3/2
  - Com desfaríeu el nus per a tornar al 0?

- A quin nombre arribeu amb **TTRTTTRT**?
  - Com desfaríeu el nus per a tornar al 0?
- També podeu fer-ho amb **TTRTTRTTR** (veureu que us porta a $-\frac{3}{4}$)
- O amb **TTTTTTRT** (vegeu primer que correspon a 5/6)

Us sembla que l'algorisme següent pot servir per desfer qualsevol nus racional de Conway?

Si la fracció és negativa anem fent **T***orçar repetides vegades, és a dir anem sumant 1, fins que aparegui una fracció positiva.* *Si la fracció (o el nombre enter) és positiva fem una vegada* **R***odar per obtenir-ne una de negativa.* *Tot aquest procés s'ha de repetir fins a obtenir un enter negatiu i llavors aplicar tantes vegades Torçar com indica el valor absolut d'aquest enter negatiu.*

Anem ara a estudiar la qüestió inversa, aquella que ja hem suggerit que ens diu que : amb les transformacions de **T**orçar i **R**odar podem arribar, a partir del 0, a qualsevol nombre racional.

Fixeu-vos en les parelles següents de seqüències:

$$4 \xrightarrow{R} -\frac{1}{4} \xrightarrow{T} \frac{3}{4} \xrightarrow{R} -\frac{4}{3} \xrightarrow{T^2} \frac{2}{3} \xrightarrow{R} -\frac{3}{2} \xrightarrow{T^2} \frac{1}{2} \xrightarrow{R} -2 \xrightarrow{T^2} 0$$

$$0 \xrightarrow{T^2} 2 \xrightarrow{R} -\frac{1}{2} \xrightarrow{T^2} \frac{3}{2} \xrightarrow{R} -\frac{2}{3} \xrightarrow{T^2} \frac{4}{3} \xrightarrow{R} -\frac{3}{4} \xrightarrow{T} \frac{1}{4} \xrightarrow{R} -4$$

$$-\frac{7}{9} \xrightarrow{T} \frac{2}{9} \xrightarrow{R} -\frac{9}{2} \xrightarrow{T^5} \frac{1}{2} \xrightarrow{R} -2 \xrightarrow{T^2} 0$$

$$0 \xrightarrow{T^2} 2 \xrightarrow{R} -\frac{1}{2} \xrightarrow{T^5} \frac{9}{2} \xrightarrow{R} -\frac{2}{9} \xrightarrow{T} \frac{7}{9}$$

- Sabríeu trobar una seqüència per arribar a 7/8?
- I per arribar a 2022/2023?
- I per arribar a – 2022/2023?

Si us ha interessat el tema potser pensareu: seria possible, veient un nus que ha generat una companya, reconèixer quin nombre és? Difícil, difícil, direu!!!

Ara bé, una ampliació del que aquí us hem proposat, la podreu trobar a l'article:

http://www.geometer.org/mathcircles/tangle.pdf

i també a les webs:

https://nrich.maths.org/10881 https://nrich.maths.org/5746

https://nrich.maths.org/twistingandturning

Resolució d'un repte plantejat:

Per a passar del 2/3 al 0 ja haurem pensat que segur que no espot començar amb **T** i que no escaurà mai fer dues vegades seguides **R**. Idò si fem **RT** passem del 2/3 al -1/2; amb una altra **T** passem a ½. I ara amb **R** obtenim el nombre -2 . A partir d'aquí segur que ja veieu que aleshores amb dues **T** acabarem.